Knots in the stable 4-space

河内, 明夫

数理解析研究所講究録
620巻 1987年 113-135

Knots in the stable 4-space

大阪市大・理　河内明夫(Akio Kawauchi)

なめらかな有向連結$(n+2)$次元多様体 W に対し，その内部になめらかに埋め込まれた null-homotopic 有向 n 次元球面を W 内の knot という．null-homotopic という条件をつけない時，W 内の一般 knot という．互いに交わらない有限個の W 内の knots の和を W 内の link (一般 knots の和の場合，一般 link) という．2つの W 内の一般 links L_1, L_2 に対し，W 上の向き保存微分同相写像で，L_1 を L_2 に向きを保存して移すようなものが存在する時，L_1 と L_2 は同値であるといい，その同値類を型という．いわゆる knot 理論とは，この型の分類の研究をさしている．4次元トーラスと $S^2 \times S^2$ の connected sum の普遍被覆空間に微分同相な4次元多様体を安定4次元空間 (stable 4-space) といい，SR^4 で表わす．この空間は R^4 に可算無限の $S^2 \times S^2$ を connected sum することにより得られる．この報告では，SR^4 内の link の性質のうち，R^4 (又は S^4) 内の link について知られていない，あるいは存在

しないような性質を中心に研究する。目次は以下の通りであるが，安定4次元空間の性質については，[Ka1]で述べたので，§1は省略することにした。

［目 次］

§2. link の群.

なめらか有向連結 $(n+2)$ 次元多様体 W 内の一般 link L に対し，W 内になめらかに埋め込まれた次のような $(n+1)$ 次元コンパクト有向多様体 V を L の（1つの）<u>Seifert 多様体</u>という：$\partial V = L$ かつ V は閉多様体を成分に含まない。一般 link が必ずしも Seifert 多様体を持たないことは明らかであ

るが，link は必ず Seifert 多様体を持つことがわかる．いくつかの $(n+1)$ 次元球の直和に微分同相な Seifert 多様体をもつ link $L \subset W$ は <u>trivial</u> であるという．

SR^4 内の一般 link について考える．

$\boxed{\text{定義}}$ SR^4 内の link L に対して，その Seifert 多様体として $\#_m S^1 \times S^2 - \mathring{B}^3$ に微分同相なものがとれる時，その link $L \subset SR^4$ を <u>G-ribbon link</u> という．

$\boxed{\text{定義}}$ L を含むような，SR^4 内のなめらかコンパクト4次元部分多様体 W で $\partial W \cong S^3$ となるものを，一般 link $L \subset SR^4$ の <u>support</u> という．また，∂W にそって B^4 をはりつけたもの：$W^+ = W \cup B^4$ を一般 link $L \subset SR^4$ の <u>閉 support</u> という．

各一般 link $L \subset SR^4$ に対して，support W が存在することは明らかである．$\partial W \cong S^3$ だから，van Kampen 定理によって W は単連結となることがわかる．各 link $L \subset SR^4$ に対し，$L \subset W$（又は W^+）は link となる．もとの一般 link $L \subset SR^4$ は一般 link $L \subset W$（又は W^+）から <u>stabilization により得られた</u> ということもある．その理由は，$SR^4 - \mathring{W}$ は必ず $SR^4 - \mathring{B}^4$ に微分同相になり（cf. [Ka1]），従って，一般 link $L \subset SR^4$ は，$\mathring{W}$ に可算無限個の $S^2 \times S^2$ を connected sum して $L \subset W$

から得られたと解せるからである．SR^4 内の一般 link L に対し，$G(L)=\pi_1(SR^4-L)$ をその群という．ある群 G の元 $x_1,\cdots,x_s$ に対し，$(x_1,\cdots,x_s)^G$ によって，元 $x_1,\cdots,x_s$ の G での normal closure を表わすことにする．

$\boxed{\text{定理 2.1}}$ r 成分の link $L\subset SR^4$ の群 $G(L)$ は，その meridians $m_1,m_2,\cdots,m_r$ に対して $(m_1,m_2,\cdots,m_r)^{G(L)}=G(L)$ かつ $H_1(G(L))\cong\bigoplus_r Z$ となるような有限表示群である．さらに，$(m_1,m_2,\cdots,m_r)^G=G$ かつ $H_1(G)\cong\bigoplus_r Z$ となる任意の有限表示群 G と元 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ に対し，G をその群としかつ $m_1,m_2,\cdots,m_r$ を meridians とするような r 成分の G-ribbon link $L\subset SR^4$ が存在する．

次は任意の有限表示群は SR^4 内の一般 link の群として実現できることを示している：

$\boxed{\text{定理 2.1}'}$ r 成分の一般 link $L\subset SR^4$ の群 $G(L)$ は，その meridians $m_1,m_2,\cdots,m_r$ に対して $(m_1,m_2,\cdots,m_r)^{G(L)}=G(L)$ となるような有限表示群である．さらに，任意の有限表示群

G と $(m_1, m_2, \cdots, m_r)^G = G$ となる元 $m_1, m_2, \cdots, m_r$ に対して, G をその群とし, かつ $m_1, m_2, \cdots, m_r$ を meridians とする r 成分の一般 link $L \subset SR^4$ が存在する.

G-ribbon link $L \subset SR^4$ は trivial 法バンドルを持つある一般 link $L^* \subset SR^4$ から次の操作で得られる link と言いかえることができる: collar $L^* \times [0,1] \subset SR^4$ の境界である一般 link $\partial(L^* \times [0,1]) \subset SR^4$ に fusion (つまり 1-handles に関した surgery) を行う … <u>操作(A)</u>という.

定義 $SR^4 = R^4 \#_{i=1}^{\infty} S^2 \times S^2_i$ と表わした場合に, R^4 内の trivial link といくつかの $S^2 \times S^2_i$ の factors の和である一般 link に同値な L^* から操作(A)で得られる link $L \subset \Sigma$ を <u>Q-ribbon link</u> という. ($p \times S^2$ 又は $S^2 \times p$ $(p \in S^2)$ を $S^2 \times S^2$ の factor という.)

定理2.2 Q-ribbon link の群の class は R^4 内のなめらかに埋め込まれた有向閉曲面の群の class と一致する. さらに, Q-ribbon link の群でない (G-ribbon) link の群が多数存在する.

trivial link である L^* から 操作(A)で 得られる link $L \subset SR^4$ を <u>ribbon link</u> という。 これは R^4 内の通例の ribbon link の SR^4 への stabilization と考えられる. 特に, R^4 及び SR^4 内の ribbon links の群の classes は一致する.

link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ に対し, 積 $S^1 \times (S^3, k_1 \cup \cdots \cup k_r)$ を考える. S^3 内の互いに交わらない 3-球 $B_1, \ldots, B_r$ で $B_i \cap k_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, が B_i で unknotted arc となるものをとる. $S^1 \times B_i$ を $D^2 \times \partial B_i$ でおきかえる surgery により $S^1 \times k_1 \cup \cdots \cup S^1 \times k_r \subset S^1 \times S^3$ から r 成分 link $L' \subset \#_{r-1} S^2 \times S^2$ を得る.

定義 $\#_{r-1} S^2 \times S^2$ の SR^4 への stabilization により L' から得られる link $L \subset SR^4$ を link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ の <u>surgery-spun link</u> という.

定理2.3 surgery-spun link $L \subset SR^4$ が link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ から得られているとする. その時 次が成りたつ:

(0) link $L \subset SR^4$ の型は link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ の型により一意に決まる,

(1) 自然な meridian 保存同型 $\pi_1(S^3 - k_1 \cup \cdots \cup k_r) \cong G(L)$ が存在する,

(2) $L \subset SR^4$ は Q-ribbon link である,

(3) L の各成分は SR^4 内のある4-球内に,対応する成分 k_i の spun knot として,入ることができる.

定義 次の性質をもつ link $L \subset SR^4$ を <u>flexible</u> という:
任意の写像 $f: S^2 \to SR^4$ が $f'S^2 \cap L = \phi$ となる写像 $f': S^2 \to SR^4$ に homotopic になる.

補題2.4 link $L \subset SR^4$ が flexible となる必要十分条件は $H_2(G(L)) = 0$ となることである.

系 link $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ の surgery-spun link $L \subset SR^4$ に対して次は同値:

(1) $L \subset SR^4$ は flexible,

(2) $L \subset SR^4$ は SR^4 内のある4-球に入る,

(3) $k_1 \cup \cdots \cup k_r \subset S^3$ は completely splittable.

定理2.2と例えば Litherland [Lit] の結果により,次がわかる:

系 各 $r \geq 1$ に対し,r 成分の flexible でない Q-ribbon links が多数存在する.

定理2.1とKervaireの結果[Ke1]により次がわかる:

$\boxed{系}$ flexible linksの群のclassは S^{n+2} $(n\geqq 3)$ 内のlinksの群のclassと一致する.

この系とYajima [Y1], [Y2]の結果により次が出る:

$\boxed{系}$ flexible linkの群はQ-ribbon linkの群である.

§3で述べるように、SR^4内のlinkのtorsion pairing invariantによって, 次がわかる: G-ribbonでない(従ってQ-ribbonでない) flexible linksが多数存在する。

§3. torsion pairing invariant.

Hを無限巡回群$\langle t\rangle$の整数環$\Lambda=Z\langle t\rangle$上の有限生成加群とする. DHによって, Hの最大の有限Λ-部分加群を表わす(cf. [Ka2])。THをHのΛ-torsion部分とし, $BH=H/TH$とおく. $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(H,\Lambda)$を$E^1H$と書く. link $L\subset SR^4$に対し, $E(L)=SR^4-L$とおく. Lの各meridianをtに移すepimorphism $\pi_1(E(L))\longrightarrow\langle t\rangle$に

付随した被覆を$\tilde{E}(L)$と書く時，$H_1(\tilde{E}(L))$は有限生成Λ-加群である(cf. 定理2.1)。次の定理は[Ka2]の第2双対定理の帰結である：

$\boxed{\text{定理3.1}}$ 各 link $L \subset SR^4$ に対し，次の(1)と(2)を満たすような t-isometric, symmetric, non-singular pairing $\ell : D(L) \times D(L) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ が存在する：

(1) $(D(L), \ell)$ は link の型の invariant である，

(2) link の型で不変な t-反 epimorphism

$$\theta : DH_1(\tilde{E}(L)) \longrightarrow E^1(BH_2(\tilde{E}(L)))$$

が存在し，$D(L)$ はその kernel に等しい。

$\boxed{\text{注意}}$ S^4内の knot K の SR^4 への stabilization を $\bar{K} \subset SR^4$ と表わす時，この pairing $\ell : D(\bar{K}) \times D(\bar{K}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は knot $K \subset S^4$ の Farber/Levine pairing (Farber [F], Levine [Lev]) と一致する.

$\boxed{\text{注意}}$ $L \subset SR^4$ が G-ribbon link ならば，$D(L) = 0$ となる。

S^4内の knot について Levine [Lev] が呼んでいたように

$(D(L), \ell)$ を link $L \subset SR^4$ の <u>torsion pairing</u> と呼ぶことにする。上の注意により、次がわかる：

系 各 $r \geqq 1$ に対し、G-ribbon でない r 成分の flexible 及び non-flexible links が多数存在する。

knot $K \subset SR^4$ に対して、$t-1 : H_1(\tilde{E}(K)) \cong H_1(\tilde{E}(K))$、従って $t-1 : D(K) \cong D(K)$ となるので、次は SR^4 内の knots の torsion pairings を特徴づける：

定理 3.2 $t-1 : D \cong D$ となる任意の有限 Λ-加群 D とその上の任意の t-isometric, symmetric, non-singular pairing $\ell_D : D \times D \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ に対し、Λ-同型 $(D, \ell_D) \cong (H_1(\tilde{E}(K)), \ell)$ をもつ knot $K \subset SR^4$ が存在する。

注意 多くの (D, ℓ_D) は S^4 内の knot により実現できる (cf. Zeeman [Z]) が、すべての (D, ℓ_D) が S^4 内の knot で実現できるかどうか知られていない (cf. Levine [Lev])。

§4. 極小 Seifert 多様体をもてない knots とその supporting degree.

なめらかな有向連結 $(n+2)$ 次元多様体 W 内の一般 link L が Seifert 多様体 V を持っていたと仮定する.

定義 V の各連結成分 V_j に対して, $\pi_1(\mathring{V}_j) \to \pi_1(W-L)$ が 1:1 になる時, Seifert 多様体 V は <u>極小</u> であるという.

$n=1$ のとき, W 内の Seifert 曲面をもつ一般 link は必ず極小 Seifert 曲面をもつ. これは loop 定理からよく知られていることである.

命題 4.1 $n \geq 3$ で W がコンパクトの場合, Seifert 多様体をもつ W 内の一般 link は必ず極小 Seifert 多様体をもつ.

この証明は Gutiérrez [G, Lemma 1] と同様にしてできる.
SR^4 内の link L が極小 Seifert 多様体を持つのは, L のある support W の中で極小 Seifert 多様体をもつ

時であり，しかもその時に限る。

$\boxed{\text{命題 4.2}}$ S^3 内の任意の link の surgery-spun link $\subset S\mathbb{R}^4$ は極小 Seifert 多様体をもつ。

$\boxed{\text{定義}}$ $\#_m S^2 \times S^2$ に微分同相な一般 link $L \subset S\mathbb{R}^4$ の閉 supportsのうち，最小の m を，一般 link $L \subset S\mathbb{R}^4$ の <u>supporting degree</u> といい，$sd(L)$ で表わす，ただし $\#_0 S^2 \times S^2 = S^4$ とする。

$\boxed{\text{定理 4.3}}$ 任意の自然数 n に対し，S^4 内の fibered knot の stabilization でできた knot $K_0 \subset S\mathbb{R}^4$ および knots $K_i \subset S\mathbb{R}^4$，$i=1,2,\cdots,n$，の組で，次をみたすものが多数存在する：

(1) $G(K_i)$，$i=0,1,\cdots,n$，はすべて meridians を保存して同型である，

(2) $H_2(\tilde{E}(K_i))$，$i=0,1,\cdots,n$，のどの2つも Λ-同型でない，

(3) $sd(K_i)=i$，$i=0,1,\cdots,n$，

(4) $i \neq 0$ となる K_i は極小 Seifert 多様体をもたない。

注意 定理4.3の証明には使えないが，次の命題は極小Seifert多様体を持てないSR^4内のknotの比較的簡単な構成法を与える：

命題4.4 knot $K \subset SR^4$が極小Seifert多様体をもち，かつG(K)のcommutator部分群$[G(K),G(K)]$が有限生成ならば，$[G(K),G(K)]$は3次元有向連結閉多様体の基本群に同型になる．

この命題はNeuwirth[N, Theorem 4.5.1]と同様の方法で示すことができる．S^3内のnon-trivial fibered knotの0-surgeryでできる3次元多様体の基本群をGとする．GはSR^4内の（実際，$S^2 \times S^2$内の）あるknotの群になる．Gをその群としてもつような任意のSR^4内のknotは極小Seifert多様体を持つことができない．何故ならば$[G,G]$はgenusが正の有向閉曲面の基本群に同型であり，従ってそれは3次元有向連結閉多様体の基本群に同型になれないからである．定理4.3は$[G(K),G(K)]$が3次元有向連結閉多様体の基本群に同型であっても極小Seifert多様体をもてないknot $K \subset SR^4$の例を与えている．S^4内のknotで極小Seifert

多様体を持てない例は知られていない。

注意　S^4内のknots Kに対して，定理4.3の(1),(2)を同時に満たすようなものは存在しない．というのはt-反同型 $H_2(\tilde{E}(K)) \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(H_1(\tilde{E}(K)), Q(\Lambda)/\Lambda)$，$E(K)=S^4-K$，がいつも成りたち（例えば，Levine [Lev]を見よ），従ってΛ-加群$H_2(\tilde{E}(K))$はその群$G(K)=\pi_1(E(K))$で決定されるからである．

しかしながら，S^4内のknot Kに対してさえ，その群$G(K)$とそのmeridianの対は，一般には，$E(K)$のhomotopy型を決定しないことが知られている(cf. Plotnick/Suciu [P/S])．

注意　Lee [Lee]は$S^2\times S^2$内のknots Kで，その群$G(K)=\pi_1(S^2\times S^2-K)$が$H_2(G(K))\neq 0$となるものの存在を示すことにより，$S^2\times S^2$内のknotsで4-球に入れない例を与えた。定理4.3はその群がS^4内のknotsの群に同型であっても4-球に入れない$S^2\times S^2$内のknotsの例を与えている．Tamura [T]は類似の問題をもっと高い次元において考えていた。

§5. Cobordism.

R^3 内の linking number が 0 でない link $k_1 \cup k_2$ に対し，その成分 k_i は互いに交わらないコンパクト有向曲面を $R^4_+ = R^3 \times [0, +\infty)$ において bound することはない．一方，SR^4 内の link については，このようなことは決して起らない．

$\boxed{\text{命題5.1}}$ SR^4 内の各 link に対し，その成分は，$SR^4 \times [0, +\infty)$ において，なめらかに埋め込まれた，互いに交わらない，コンパクト有向 3 次元多様体を bound する．

これは，ある意味で，SR^4 内の link に対し，linking number に対応する不変量が存在しないことを意味する．

$\boxed{\text{定義}}$ 2つの links $L, L' \subset SR^4$ が <u>I-equivalent</u> であるというのは，$SR^4 \times [0,1]$ に位相的に埋め込まれた，$L \times [0,1]$ に同相な多様体 A で，$(\partial A) \cap SR^4 \times 0 = (-L) \times 0$，$(\partial A) \cap SR^4 \times 1 = L' \times 1$ かつ $(\partial A) \cap SR^4 \times (0,1) = \phi$ となるものが存在する時をいう．さらに，A がなめらかに $SR^4 \times [0,1]$ に埋め込まれている場合，$L, L' \subset SR^4$ は

<u>cobordant</u> であるという.

すべての成分が,互いに交わらないような Seifert 多様体を持つような link $L \subset SR^4$ を <u>boundary link</u> という.また,非連結 Seifert 多様体をもつような link $L \subset SR^4$ を <u>weakly split link</u> という。次は Kervaire [Ke2] と同じ方法で示される:

命題5.2 SR^4 のすべての boundary links は trivial links に cobordant である.特に,SR^4 のすべての knots は trivial knot に cobordant である.

S^4 のすべての links (もっと一般に,SR^4 内のすべての flexible links) は trivial links に cobordant かどうかは知られていない (cf. Cochran [C]) が,SR^4 内の non-flexible links に対しては,I-equivalent になれないものが多数存在する。実際,次が示される:

定理5.3 各整数 $r \geq 2$ に対し,次のような r 成分の links $L \subset SR^4$ が (I-equivalence を無視して) 多数存在する: L に I-equivalent な任意の link

L'は $sd(L') \geq r-1$ をみたし，*flexible*でなく，また*weakly split*でない．

我々は，また，次を示すことができた：

$\boxed{\text{定理5.4}}$ 各整数 $r \geqq 2$ に対し，$G(L)$ と $G(L')$ が meridiansを保存して同型であるが，cobordantでない r 成分の *links* $L, L' \subset SR^4$ の対が（*I-equivalences* を無視して）多数存在する．

§6. Arithematic.

任意の*link* $L \subset SR^4$ と L上の点 p に対し，SR^4になめらかにかつ*proper*に埋め込まれた半開区間 α で，$\partial\alpha = p$ かつ $\mathring{\alpha} \cap L = \phi$ となるものを，点pを始点として*link* Lから出発する*half-open line* と呼ぶ．

$\boxed{\text{補題6.1}}$ 同じ点を始点として link L から出発する 2本の half-open lines α_1, α_2 に対し，α_1 を α_2 に移しかつ L を固定するような SR^4 の向き保存同相写像が存在する．

SR^4 内の knots K_i, $i=1,2$, から出発する half-open lines α_i の tube 近傍 $T(\alpha_i)$ で，$(T(\alpha_i), T(\alpha_i) \cap K_i) \cong (D^3 \times [0, +\infty), D^2 \times 1)$ となるものをとる，ここで $D^2 \subset D^3$ は標準的な disk pair とする．

今，2つの pairs $(SR^4 - \mathring{T}(\alpha_i), K_i - \mathring{T}(\alpha_i) \cap K_i)$, $i=1,2$, をそれらの boundaries にそって，向き逆転微分同相写像により，はり合わせることによって，SR^4 内の新しい knot K' ができる．補題6.1から この knot K' の型は，half-open lines の取り方によらず K_1 と K_2 の型だけで決まることがわかる．この knot K' を K_1 と K_2 の <u>sum</u> といい $K_1 \# K_2$ で表わす．

$\boxed{\text{定義}}$ $K = K_1 \# K_2$ と表わした時，必ず K_1 又は K_2 が trivial knot となるような knot $K \subset SR^4$ を <u>prime</u> という。

$\boxed{\text{定理}6.2}$ 任意の knot $K \subset SR^4$ は有限個の prime knots の sum になる。

この結果は少し後で述べる Maeda の定理 [Mae] と次の、本質的には Matumoto [MaT] による、Triviality 定理の直接の結果である：

$\boxed{\text{定理}6.3 (\text{Triviality 定理})}$ link $L \subset SR^4$ が trivial である必要十分条件は、$G(L)$ が meridians を基底にもつ自由群となることである。特に、knot $K \subset SR^4$ が trivial である必要十分条件は、$G(K) \cong \mathbb{Z}$ となることである。

Maeda の定理を述べるために、$(m)^G = G$ かつ $H_1(G) \cong \mathbb{Z}$ となる有限表示群 G とその元 m の pair (G, m) を考える。そのような2つの pairs (G_i, m_i), $i=1,2$, について、pair $(G_1 \underset{m_1=m_2}{*} G_2, m_1 (=m_2))$ をそれらの <u>sum</u> と呼び、$(G_1, m_1) * (G_2, m_2)$ と表わす。$(G, m) = (G_1, m_1) * (G_2, m_2)$ と表わす時、必ず G_1 又は $G_2 \cong \mathbb{Z}$ となるような (G, m) を <u>prime</u> という。$K = K_1 \# K_2$ に対して、$(G(K), m) = (G(K_1), m_1) * (G(K_2), m_2)$ (m, m_i は K, K_i の meridians) となる。従って $(G(K), m)$ が prime ならば、Triviality 定理によって、K は prime となる。

$\boxed{\text{Maedaの定理}}$ (G, m)は必ず有限個のprime pairs (G_i, m_i)の sumになる。しかも、そのsumは(順番を除けば)ただ一通りである。

定理6.2で述べたSR^4内のknotのprime分解が一意的かどうかはわからない。次にSR^4内のknotのunknotting numberについて考える。SR^4になめらかに埋め込まれたsolid torusの境界曲面はSR^4のambient isotopyを無視してただ1つしかない。これは[H/K]と同様な方法で示せる。この曲面を<u>unknotted曲面</u>という。SR^4内のknot Kは、Seifert多様体をもつのだから、[H/K]と同様にして、有限個の1-handlesによるsurgeryにより、Kはunknotted曲面に変換できる。従って、Hosokawa/Maeda/Suzuki [HMS]と同様にして、SR^4内のknot **K**にunknotting numberを定義できる。

$\boxed{\text{定義}}$ surgeryによって、unknotted曲面に変換するのに必要な、knot Kにそった1-handlesの個数のうち、最小のものをknot $K \subset SR^4$の<u>unknotting number</u>と呼び、$u(K)$で表わす。

knot $K \subset SR^4$ に対し，SR^4-K の中のなめらかな null-homologous 単純閉曲線 C を考える．C の tube 近傍 $T(C) \cong S^1 \times D^3$ にそった spin surgery $SR^4 - T(C) \cup D^2 \times \partial D^3$ は $SR^4 \# S^2 \times S^2 \cong SR^4$ に微分同相である．これにより，knot $K \subset SR^4$ は新しい knot $K' \subset SR^4$ に変わる．C に homotopic な loop で表される $G(K)$ の元を $x(C)$ と書く時，$G(K')$ は $G(K)$ に関係 $x(C)=1$ をつけ加えたものである．$G(K)$ は有限生成だから，このような変換　　　　の有限回で，K をその群が Z となる knot，つまり Triviality 定理によって trivial knot，に変換できる．

$\boxed{\text{定義}}$ この変換の最少回数を knot $K \subset SR^4$ の <u>unknotting number in the weak sense</u> といい，$u_w(K)$ で表わす．

$b(K)$，$w(K)$，$e(K)$ によって，$G(K)$ の meridian generators の最少数，$(\alpha_1, \dots, \alpha_s)^{G(K)} = [G(K), G(K)]$ となる元 $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in [G(K), G(K)]$ の最少の数 s，$H_1(\tilde{E}(K))$ の Λ-generators の最少数をそれぞれ表わす．このとき，次が成り立つ：

$\boxed{\text{定理 6.3}}$ $e(K) \leq w(K) = u_w(K) \leq u(K) \leq b(K) - 1$.

参考文献

[C] T. Cochran, Slice links in S^4, Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 389-401.

[F] M. Š. Farber, Duality in an infinite cyclic covering and even-dimensional knots, Math. USSR Izvestija 11 (1977), 749-781.

[G] M. A. Gutiérrez, An exact sequence calculation for the second homotopy of a knot, Proc. Amer. Math. Soc. 32 (1972) 571-577.

[H/K] F. Hosokawa / A. Kawauchi, Proposals for unknotted surfaces in four-spaces, Osaka J. Math. 16 (1979), 233-248.

[H/M/S] F. Hosokawa / T. Maeda / S. Suzuki, Numerical invariants of surfaces in 4-space, Math. Sem. Notes 7 (1979), 409-420.

[Ka1] 河内, Stabilization of exotic 4-spaces, 数理研講究録「多様体のトポロジー」の中.

[Ka2] A. Kawauchi, Three dualities on the integral homology of infinite cyclic coverings of manifolds, Osaka J. Math. (to appear).

[Ka3] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space: An introduction (to appear)

[Ka4] A. Kawauchi, Knots in the stable 4-space, I: The stable 4-space, II: The groups of links, III: The torsion pairing invariant, IV: Knots with no minimal Seifert manifolds and the supporting degree, V: Cobordism, VI: Arithematic. (ただ今準備中)

[Ke1] M.A. Kervaire, On higher dimensional knots, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 1965, 105–119.

[Ke2] M.A. Kervaire, Les noeuds de dimensions supérieures, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 225–271.

[Lee] Y.W. Lee, Contractibly embedded 2-spheres in $S^2 \times S^2$, Proc. Amer. Math. Soc. 85 (1982), 280–282.

[Lev] J. Levine, Knot modules. I, Trans. Amer. Math. Soc. 229 (1977), 1–50.

[Lit] R.A. Litherland, The second homology of the group of a knotted surface, Quart. J. Math. 32 (1981), 425–434.

[Mae] T. Maeda, Star decompositions of groups splitting along cyclic groups.

[Mat] T. Matumoto, On a weakly unknotted 2-sphere in a simply-connected 4-manifold, Osaka J. Math. 21 (1984), 489–492.

[N] L.P. Neuwirth, Knot Groups, Ann. Math. Studies 56, Princeton Univ. Press, 1965.

[P/S] S.P. Plotnick / A.I. Suciu, k-Invariants of knotted 2-spheres, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 54–84.

[T] I. Tamura, Fundamental theorems in global knot theory (preprint).

[Y1] T. Yajima, On a characterization of knot groups of some spheres in R_4, Osaka J. Math. 6 (1969), 435–446.

[Y2] T. Yajima, Wirtinger presentations of knot groups, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 997–1000.

[Z] E.C. Zeeman, Twisting spun knots, Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965), 471–495.